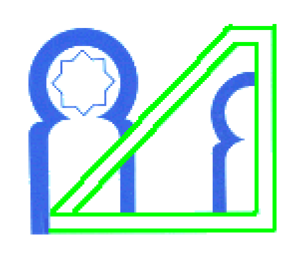


UNIVERSITÉ MOHAMMED V
FACULTÉ DES SCIENCES

Rabat

cours :

Mécanique de solide

SMP3 2014-2015

KAMAL GUERAOUI
Professeur de l'Enseignement Supérieur et Responsable de l'Equipe de Modélisation en Mécanique des Fluides et en Environnement

Chapitre 1: Champs de vecteurs et Torseurs

I. Champs de vecteurs

1. Types de vecteurs

a. vecteur libre

On dit qu'un vecteur est libre s'il est défini par ses trois éléments ; sa longueur, sa direction et son sens.

b. vecteur glissant

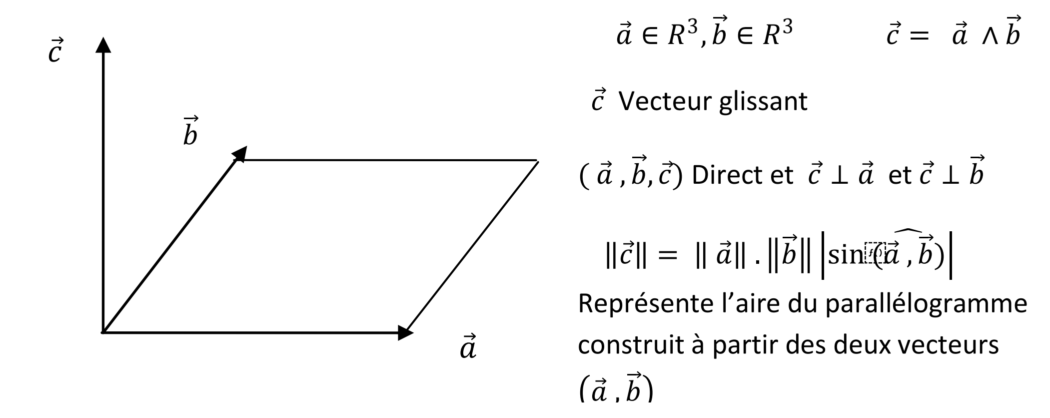
On dit qu'un vecteur est glissant s'il est défini en plus des trois éléments précédents par son support (D).

c. vecteur lié

On dit qu'un vecteur est lié si son point d'application est défini.

2. Produit vectoriel :

2.1. Définition :



$\vec{a} \in R^3, \vec{b} \in R^3$ $\qquad \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

$\vec{c}$ Vecteur glissant

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ Direct et $\vec{c} \perp \vec{a}$ et $\vec{c} \perp \vec{b}$

$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \left|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\right|$

Représente l'aire du parallélogramme construit à partir des deux vecteurs $(\vec{a}, \vec{b})$

2.2. Propriétés :

- $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ anti-commutativité
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
- Si $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ soit $\vec{a} = \vec{0}$ ou $\vec{b} = \vec{0}$ ou $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- Base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

$\vec{\imath}.\vec{\jmath}, = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$ $\quad\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$ $\quad\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$

$\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$

2.3. Double produit vectoriel :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a}.\vec{c}).\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c}).\vec{a}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{b}).\vec{b} - (\vec{a}.\vec{c}).\vec{c}$$

2.4. Produit Mixte :

$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) \overset{not\acute{e}\ aussi}{\Longleftrightarrow} (\vec{u}.\vec{v}.\vec{w})$ Invariant par mutation circulaire $=(\vec{w}.\vec{u}.\vec{v}) =(\vec{v}.\vec{w}.\vec{u})$

Par contre $(\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}) = -(\vec{v}.\vec{u}.\vec{w})$

Le produit mixte représente le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}\ et\ \vec{w}$

3. Application linéaire de $\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$

On appelle application L de $\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ une relation mathématique définit par :

$$L: \vec{u} \in R^3 \quad \to \quad L(\vec{u}) \in R^3$$

L est linéaire si et seulement si $\forall\alpha \in R \quad \forall\beta \in R$

$$L(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha L(\vec{u}) + \beta L(\vec{v})$$

Si $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base orthonormée de $R^3 alors\ L$ est représentée par une matrice $IL\ associée$ à L.

$$IL = (l_{ij})_{i,j\in 3} = \begin{matrix} l(e_1) & l(e_2) & l(e_3) \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{ij} = \vec{e_i}.L(\vec{e_j})$$

4. Application linéaire antisymétrique

4.1. Définition

L est linéaire de $R^3 \rightarrow R^3$

L est antisymétrique → $\forall \vec{u} \in R^3$, $\forall \vec{v} \in R^3$ $\vec{v}.L(\vec{u}) = -\vec{u}.L(\vec{v})$

4.2. Propriété :

Si L est antisymétrique alors il existe $\vec{R}$ un vecteur associé à L tel que

$\forall \vec{u} \in R^3 \quad L(\vec{u}) = \vec{R} \wedge \vec{u}$

- ***Démonstration :***

$$L(\vec{u}) = \vec{R} \wedge \vec{u}$$

$\forall \vec{u} \in R^3 \qquad \vec{u}.L(\vec{u}) = -\vec{u}.L(\vec{u}) = 0$

$\forall \vec{u} \in R^3 \qquad \vec{u}.L(\vec{u}) = 0 \leftrightarrow \vec{u} \perp L(\vec{u})$ donc $L(\vec{u}) = \vec{R} \wedge \vec{u}$ unicité.

On suppose $\overrightarrow{R_1}$ et $\overrightarrow{R_2}$: $\forall \vec{u} \in R^3 \quad L(\vec{u}) = \overrightarrow{R_1} \wedge \vec{u}$ et $L(\vec{u}) = \overrightarrow{R_2} \wedge \vec{u}$

En faisant la soustraction de ces deux expressions, on obtient :

$$\vec{0} = \overrightarrow{R_1} \wedge \vec{u} - \overrightarrow{R_2} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{0} = \left(\overrightarrow{R_1} - \overrightarrow{R_2}\right) \wedge \vec{u} \qquad \forall \vec{u} \rightarrow \qquad \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2}$$

Calcul pratique de $\vec{R}$:

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ base orthonormée direct de R^3

$\vec{R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{e_i} \wedge L(\overrightarrow{e_i}) \qquad \vec{R} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix}$

$L(\overrightarrow{e_1}) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{e_1}$

$L(\overrightarrow{e_2}) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{e_2}$ donc $\overrightarrow{e_1} \wedge L(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} \wedge \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{e_1}\right) = \vec{R} - R_1\overrightarrow{e_1}$

$L(\overrightarrow{e_3}) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{e_3}$ $donc$ $\overrightarrow{e_2} \wedge L(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} \wedge \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{e_2}\right) = \vec{R} - R_2\overrightarrow{e_2}$

$\vec{e_3} \wedge L(\vec{e_3}) = \vec{e_3} \wedge \left(\vec{R} \wedge \vec{e_3}\right) = \vec{R} - R_3\vec{e_1}$

5. Champs vectoriels :

5.1. Définition 1 :

On appelle champ de vecteurs $\vec{\tau}$, l'application définit par : $\forall \vec{P} \in R^3 \rightarrow \vec{\tau}(P) \in R^3$

Ce champ est uniforme si $\vec{\tau}(P) = \overrightarrow{cst}$

Ce champ est central si $\exists A \in R^3, \forall P \in R^3 \qquad \vec{\tau}(P) \parallel \overrightarrow{AP}$

5.2. Définition 2 :

Le champ $\vec{M}$ est affine s'il existe un point $A \in R^3$ et une application linéaire L de $R^3 \rightarrow R^3$ tel que :

$$\forall P \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(A) + L(\overrightarrow{AP})$$

5.3. Définition 3 :

$\vec{M}$ est affine et antisymétrique si de plus L est antisymétrique.

$$\vec{M} \text{ antisymétrique} \rightarrow \forall P \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

Où : $\vec{R}$ est le vecteur associé à L.

5.4. Propriété :

$$\forall P \in R^3, \forall Q \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

En effet $\forall P \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$

$$\forall Q \in R^3 \qquad \vec{M}(Q) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AQ}$$

$$\vec{M}(P) - \vec{M}(Q) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP} - \vec{R} \wedge \overrightarrow{AQ} = \vec{R} \wedge \left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}\right) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

5.5. Définition :

Un champ vectoriel $\vec{M}$ est équiprojectif ssi :

$$\forall P \in R^3, \forall Q \in R^3 \qquad \overrightarrow{QP}.\left(\vec{M}(P) - \vec{M}(Q)\right) = 0$$

Démonstration :

D'une part :

$\vec{M}$ est équiprojectif $\forall P \in R^3, \forall Q \in R^3$, $\left(\vec{M}(P) - \vec{M}(Q)\right).\overrightarrow{QP} = 0$,

donc $\overrightarrow{QP}$ $est\ perpendiculaire$ à $\left(\vec{M}(P) - \vec{M}(Q)\right)$ par conséquent il existe un vecteur $\vec{R}$ tel que : $\vec{M}(P) - \vec{M}(Q) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$, d'où le champs est antisymétrique.

II. Torseurs :

1. Définition :

Un torseur τ est objet mathématique défini par la donnée de deux vecteurs :

- Un champ vectoriel antisymétrique noté $\vec{M}$ appelé champ de moment de τ
- un vecteur $\vec{R}$ associé à ce champ appelé résultante de τ

2. Remarque :

$\vec{R}$ est indépendant du point P (mais il peut dépendre de d'autres paramètres, exemple, le temps t).

$\left\{\vec{R}, \vec{M}(A)\right\}$ sont appelés éléments de réduction de τ en A .

La donnée des éléments de réduction en A détermine complément τ

En effet $\forall P \in R^3$

$\vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$ Formule de distribution des champs de moments de τ

- **Exemple :**

L'étude de (S) par rapport à R

Soit $\vec{f}(P \in S)$ la densité δ des efforts appliqués sur (S) par rapport à R.

- ***Démonstration :***

$$\begin{cases} \vec{f}(P \in S) \; si \; P \in S \\ \vec{0} \qquad si \; non \end{cases}$$

$$\forall A \qquad \vec{M}(A) = \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}(P \in S)dm$$

Est-ce $\vec{M}$ un champ de moments de torseur ?

$$\forall A, \forall B \qquad \vec{M}(A) = \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}(P \in S)dm$$

$$= \int \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}\right) \wedge \vec{f}(P \in S)dm$$

$$= \int \overrightarrow{AB} \wedge \vec{f}(P \in S)dm + \int \overrightarrow{BP} \wedge \vec{f}(P \in S)dm$$

$$\vec{M}(A) = \overrightarrow{AB} \wedge \int \vec{f}(P \in S)dm + \vec{M}(B)$$

On pose $\vec{R} = \int \vec{f}(P \in S)dm$ indépendant de P, la densité $\vec{f}(P \in S)$ définit un torseur τ

5. Définition :

On appelle invariant scalaire I du torseur $\tau\{\vec{R}, \vec{M}(A)\}$ le scalaire $I = \vec{R}.\vec{M}(A)$

6. Remarque :

Cette quantité I est indépendante du point A utilisé pour le calculer.

$$\forall P \in R^3 \qquad I = \vec{R}.\vec{M}(A) = I = \vec{R}.\vec{M}(P)$$

- ***Démonstration :***

$$\forall P \in R^3 \qquad I = \vec{R}.\vec{M}(A) = \vec{R}.\left[\vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PA}\,\right]$$

$$= \vec{R}.\vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{PA}\,\right) = \vec{R}.\vec{M}(P)$$

- Axe centrale d'un torseur :

L'axe central d'un torseur $\tau\{\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}(A)\}$ $avec \; A \in R^3$ est par définition l'ensemble des points $P \in R^3$ tels que $\vec{M}(P) \parallel \vec{R}$

L'axe central de $\tau\{\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}(A)\}$ est une droite Δ *de* R^3

- ***Démonstration :***

$$\forall P \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$$

On décompose $\vec{M}(P)$ *de la manière suivante* $\vec{M}(P) = \vec{\beta} + \vec{\alpha}(P)$ et $\vec{M}(O) = \vec{\beta} + \vec{\alpha}(O)$

Les vecteurs $\vec{\beta}$ sont indépendants de P.

$\vec{\beta} + \vec{\alpha}(P) = \vec{\beta} + \vec{\alpha}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$

On cherche $P\ /\vec{M}(P) \parallel \vec{R} \leftrightarrow P/\vec{\alpha}(P) = \vec{0}$

$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{R} = \vec{\alpha}(O)$ [Division vectorielle → T.D]

D'après l'exercice 5 de la série 1, on a :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{\alpha}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R}$$

L'axe central du torseur $\tau\{\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}(A)\}$

$\Delta = \left(P_0, \vec{R}\right)$

En pratique $R\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ si $\vec{R} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ $\qquad \vec{M}(P) = \begin{vmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{vmatrix}$

$\Delta = \left(P/\vec{M}\,(P) = \lambda\vec{R}, \lambda \in R\right)$

Les équations cartésiennes de Δ sont : $\frac{f(x,y,z)}{a} = \frac{g(x,y,z)}{b} = \frac{h(x,y,z)}{c}$

7. Operateur sur les torseurs

a. Egalité de deux torseurs :

Soit $A \in R^3$, $\tau_1[\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{M_1}(A)]$ et $\tau_2[\overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{M_2}(A)]$

$\tau_1 = \tau_2 \rightarrow$ Les résultantes sont égales $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2}\ et\ \ \exists B \in R^3\ /\ \overrightarrow{M_1}(B) = \overrightarrow{M_2}(B)$

- ***Démonstration :***

$A \in R^3$ $\quad \overrightarrow{M_1}(P) = \overrightarrow{M_1}(B) + \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{M_2}(B) + \overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{M_2}(P)$

b. Somme de deux torseurs :

$\tau\ \ [\overrightarrow{R}\ , \overrightarrow{M}\ (A)]$ $\qquad \tau = \tau_1 + \tau_2 = [\vec{R} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2}, \vec{M}(A) = \overrightarrow{M_1}(A) + \overrightarrow{M_2}(A)]$

d. Multiplication d'un torseur par un scalaire :

$$\tau = \alpha\tau_1\ avec\ (\alpha \in R) \rightarrow \tau = [\vec{R} = \alpha\overrightarrow{R_1}, \vec{M}(A) = \alpha\overrightarrow{M_1}(A)]$$

e. Torseur nul :

On dit que le torseur $\tau est\ nul\ si\ et\ seulemnt\ si\ \leftrightarrow [\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}(A) = \vec{0}]$

8. Produit de deux torseurs :

Le produit de deux torseurs $\tau_1\ \ et\ \ \tau_2$ est un scalaire défini par :

$\tau_1.\tau_2 = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2}(A) + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1}(A)$ Au même point A.

La valeur de $(\tau_1.\tau_2)$ est indépendante de A choisi dans R^3.

Remarque :

$$\vec{\tau}.\vec{\tau} = \vec{R}.\vec{M}(P) + \vec{R}.\vec{M}(P) = 2\vec{R}.\vec{M}(P) = 2I$$

9. Torseurs particuliers :

a. Les glisseurs :
1. Définition :

τ est un glisseur noté g , si $\exists A \in R^3\ \ \vec{M}(A) = \vec{0}$

$$\forall P \in R^3 \ \ \vec{M}(P) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

2. Conséquences :

$$\forall P \in R^3 \ \ \vec{M}(P) \perp \vec{R}$$

$$I = \vec{R}.\vec{M}(P) = 0$$

L'axe central de τ: $\Delta = \left(P \in R^3 / \vec{M}(P) = \vec{0}\right) = (A, \vec{R})$

On note $\tau = \left(A, \vec{R}\right) = \left[\vec{R}, \vec{M}(P) = \vec{0}\right]$

3. Exemple :

Soit F une force concentrée $A \in (S)$.

Densité $\vec{f}(P \in S) = \begin{cases} \vec{F} & si\ P \equiv A \in (S) \\ \vec{0} & ailleurs \end{cases}$

$$\overrightarrow{M_A}\left(\vec{F}\right) = \vec{0} = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{\mathrm{F}}$$

$(A, \vec{R})$ est un glisseur $g = (A, \vec{F})$

$$\forall P \qquad \vec{M}(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\mathrm{F}} = \vec{F} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

b. Les couples :

1. Définition :

τ est un couple $si\ et\ seulement\ si\ \ \vec{R} = \vec{0}$

2. Conséquences :

$$\forall A, \forall Q \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(Q) = \vec{M}$$

$Le\ champ\ de\ moments\ est\ uniforme$

$$I = 0 = \vec{R}.\vec{M}(P)$$

3. Exemples :

Sur (S) $\begin{cases} \vec{F} & en \quad A \in (S) \\ -\vec{F} & en \quad B \in (S) \\ \vec{0} & ailleurs \end{cases}$

$$\vec{R} = \vec{F} + \left(-\vec{F}\right) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad Couple = \left(A, \vec{F}\right).\left(B, -\vec{F}\right)$$

$$\forall P \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{F} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \vec{F} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \vec{F} \wedge \left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{BP}}\right)$$

$$= \vec{F} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Chapitre 2 : Cinématique de solide

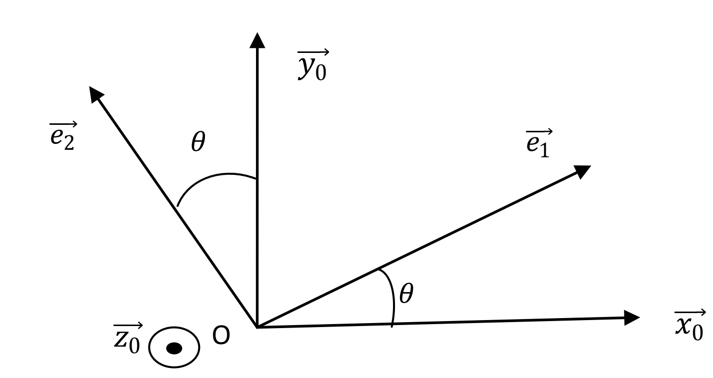
I. Dérivation des vecteurs par rapport un repère mobile :

1. Cas des vecteurs unitaires :

$Soit\ R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$, un repère orthonormé direct et fixe

$R_1(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{z_0})$, un deuxième repère orthonormé direct obtenu par rotation de R_0 autour de $\overrightarrow{Oz_0}$

On a : $\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt}=\vec{0}$



$\|\overrightarrow{e_1}\|^2=\|\overrightarrow{e_2}\|^2=\|\overrightarrow{e_3}\|^2=1$

$i=1.2.3 \qquad \overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_i}=1$

$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_i})=0=2.\overrightarrow{e_i}.\frac{d\overrightarrow{e_i}}{dt}$

$\frac{d\overrightarrow{e_i}}{dt}\perp\overrightarrow{e_i}$, $\exists\vec{R}$? / $\frac{d\overrightarrow{e_i}}{dt}=\vec{R}\wedge\overrightarrow{e_i}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{e_1}=cos\theta\overrightarrow{x_0}+sin\theta\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{e_2}=-sin\theta\overrightarrow{x_0}+cos\theta\overrightarrow{y_0}\\ \overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{z_0}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt}=\dot{\theta}[sin\theta\overrightarrow{x_0}+cos\theta\overrightarrow{y_0}]=\dot{\theta}\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1}\\ \frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt}=-\dot{\theta}[cos\theta\overrightarrow{x_0}+sin\theta\overrightarrow{y_0}]=-\dot{\theta}\overrightarrow{e_2}\wedge\overrightarrow{e_3}\\ \frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt}=\vec{0}=\dot{\theta}\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_3}\end{cases}$$

Si on pose $\vec{R}=\vec{\Omega}(R/R_0)=\dot{\theta}\overrightarrow{e_3}$ Vecteur rotation instantané de R par rapport à R_0

On peut écrire :

$$\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt}=\vec{R}\wedge\overrightarrow{e_i}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt}=\vec{R}\wedge\overrightarrow{e_2}$$

2. Cas d'un vecteur $\vec{U}$ quelconque :

Soit $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ orthonormé direct fixe.

Soit $R(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ un deuxième repère orthonormé direct et un vecteur $\vec{U} = \sum_{i=1}^{k} x_i \overrightarrow{e_i}$

On se propose de calculer

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_0} = ?$$

On a :

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}_1\overrightarrow{e_1} + \dot{x}_2\overrightarrow{e_2} + \dot{x}_3\overrightarrow{e_3} + x_1\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} + x_2\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt} + x_3\frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt}$$

$$= \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R} + x_1\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{e_1} + x_2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{e_2}$$

$$+ x_3\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{e_3}$$

$$= \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge [x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}]$$

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{U}$$

3. Propretés des vecteurs instantanés:

$$\forall R_1, \forall R_2, \forall R_3 \quad \vec{\Omega}(R_1/R_3) = \vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_3)$$

- ***Démonstration :***

$$(1) \quad \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_2) \wedge \vec{U}$$

$$(2) \quad \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_3} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_3) \wedge \vec{U}$$

$$(3) \quad \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_3} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_3) \wedge \vec{U}$$

$$En\ faisant\ (1) + (2) on\ aura:$$

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{3} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_1} + \left[\vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_3)\right] \wedge \vec{U}$$

En faisant la différence avec (3), on aura :

$$\vec{0} = \left[\vec{\Omega}(R_1/R_3) - \vec{\Omega}(R_1/R_2) - \vec{\Omega}(R_2/R_3)\right] \wedge \vec{U}$$

Comme $\vec{U}$ est quelconque alors, on déduit que :

$$\vec{\Omega}(R_1/R_3) = \vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_3)$$

$\forall R_1, \forall R_2 \ \vec{\Omega}(R_1/R_2) = -\vec{\Omega}(R_2/R_1)$

- ***Démonstration :***

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{U}$$

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_2) \wedge \vec{U}$$

On faisant la somme :

$$\vec{0} = \left[\vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1)\right] \wedge \vec{U}$$

Comme $\vec{U}$ est quelconque alors, on déduit que :

$$\vec{\Omega}(R_1/R_2) = -\vec{\Omega}(R_2/R_1)$$

4. Applications : Compositions du mouvement :

On considère le mouvement de (S) par rapport à $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ (orthonormé direct fixe.

On introduit $R(O', \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ orthonormé dans le quel le mouvement de (S) est plus simple à étudier).

$$\left.\begin{matrix}\text{Mouvement de (S)par rapport à } R_0 \text{absolu} \\ \text{Mouvement de (S)par rapport à } \quad R \;\; \text{relatif}\end{matrix}\right\}$$

$$\forall P \in (S), \quad \overrightarrow{\mathrm{V_a}}(P) = \vec{\mathrm{V}}(P/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OO'}}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\frac{d\overrightarrow{\mathrm{O'P}}}{dt}\right|_{R_0}$$

$$= \left.\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OO'}}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\frac{d\overrightarrow{\mathrm{O'P}}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{O'P}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{V_a}}(P) = \overrightarrow{\mathrm{V_r}}(P) + \overrightarrow{\mathrm{V_e}}(P)$$

Où :

$\overrightarrow{\mathrm{V_r}}(P) = \vec{\mathrm{V}}(P/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{\mathrm{O'P}}}{dt}\right|_{R}$, la vitesse relative

$\overrightarrow{\mathrm{V_e}}(P) = \vec{\mathrm{V}}(P \in R/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OO'}}}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{O'P}$, la vitesse d'entrainement

Composition des accélérations (à faire)

$$\overrightarrow{\gamma_a}(P) = \vec{\gamma} r(P) + \overrightarrow{\gamma_e}(P) + \overrightarrow{\gamma_C}(P)$$

$$\overrightarrow{\gamma_r}(P) = \vec{\gamma}(P/R) = \frac{d\overrightarrow{\mathrm{V_r}}(P)}{dt}$$

$\overrightarrow{\gamma_C}(P) = 2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{\mathrm{V_r}}(P)$ Coriolis

$$\overrightarrow{\gamma_e}(P) = \vec{\gamma}(R/R_0)$$
$$= \overrightarrow{\gamma_a}(O') + \frac{d\vec{\Omega}(R/R_0)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \left[\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{O'P}\right]$$

II. Champ de vitesse d'un solide :

On considère un solide (S) en mouvement par rapport à R_0

1. Définition :

(S) est un solide indéformable (parfait) si au cours du mouvement les distances et les angles entre les différents points restent constants.

2. Remarque :

Le mouvement de (S) est une isomètre $(S)^t \rightarrow \quad (S)^{t'>t}$ (schématisation).

$$\forall \text{ le temps } t \text{ et } \forall Q \text{ et } P \in (S) \qquad \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = cste = \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PQ}$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PQ}) = 0 \rightarrow \overrightarrow{PQ}.\frac{d}{dt}(\overrightarrow{PQ}) = 0$$

$$\overrightarrow{PQ}.\left[\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OQ}) - \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP})\right] = 0 \rightarrow \overrightarrow{PQ}.\left[\vec{V}(Q/R_0) - \vec{V}(P/R_0)\right] = 0$$

Car : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

Le champ des vitesses d'un solide est donc équiprojectif.

Il s'agit d'un champ de moments d'un torseur appelé torseur cinématique de (S) par rapport à R_0 et noté τ_{S/R_0} . $P \in (S) \rightarrow \vec{V}(P/R_0)$

3. Détermination de la résultante du torseur cinématique

Soit R_s lié à (S) $\quad \vec{V}(P/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \overrightarrow{OP}$

$$\vec{V}(Q/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OQ}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OQ}}{dt}\right|_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \overrightarrow{OQ}$$

En faisant la différence

$$\vec{V}(P/R_0) - \vec{V}(Q/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{R_s} - \left.\frac{d\overrightarrow{OQ}}{dt}\right|_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge [\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}]$$

$$= \left.\frac{d\overrightarrow{QP}}{dt}\right|_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}$$

$$= \vec{0} + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}$$

Donc la résultante du torseur cinématique est :

$$\vec{\Omega}(R_s/R_0)$$

4. Torseur cinématique :

On définit le torseur cinématique τ_{S/R_0} par ses deux éléments de réduction suivants :

$$\tau_{S/R_0} = [\vec{\Omega}(S/R_0), \vec{V}(P \in S/R_0)]$$

Remarque :

$$\forall P \in (S), \forall Q \in (S) \qquad \vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(Q/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}$$

5. Mouvements particuliers de (S) par rapport à R_0

5.1. Mouvement de translation pure

(S) est en translation pure par rapport à R_0.

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \tau_{S/R_0} \; est \; un \; couple$$

Remarque :

Dans ce cas $\forall P \in (S), \forall Q \in (S)$ le Champ de vitesse $\vec{V}(P/R_0)$ est uniforme, on aura: $\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(Q/R_0)$

5.2. Mouvement de rotation pure

(S) est en rotation pure par rapport à R_0 autour d'un axe de ses points A.

$$\forall A \in (S) \qquad \vec{V}(A/R_0) = \vec{0}$$

$$\rightarrow \quad \tau_{S/R_0}\ est\ un\ glisseur\ \ d'axe\ \left(A, \vec{\Omega}(S/R_0)\right) axe\ de\ la\ rotation.$$

Remarque :

Le champ des accélérations des points d'un solide n'est pas en général, un champ de moments de torseur.

Soit un repère $R_0, \forall P \in (S), \forall Q$ *point de l'espaceconsidéré, on a*:

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(Q/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}$$

En dérivant par rapport à t dans R_0 , on aura :

$$\vec{\gamma}(P/R_0) = \vec{\gamma}(Q/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt} \wedge \overrightarrow{QP} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \frac{d\overrightarrow{QP}}{dt}$$

Or $$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$$

$$\frac{d\overrightarrow{QP}}{dt} = \vec{V}(P/R_0) - \vec{V}(Q/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}$$

$$\forall P, \forall Q \in (S) \qquad \vec{\gamma}(P/R_0) = \vec{\gamma}(Q/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt} \wedge \overrightarrow{QP} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \left[\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}\right]$$

Est-ce que ce champ est équiprojectif ?

Pour cela, il faut vérifier si

$$\forall P, \forall Q \in (S) \qquad \overrightarrow{PQ} \cdot [\vec{\gamma}(P/R_0) - \vec{\gamma}(Q/R_0)] = 0$$

Or :

$$\overrightarrow{PQ}\,.\,[\vec{\gamma}(P/R_0)-\vec{\gamma}(Q/R_0)] = \overrightarrow{PQ}\,.\,(\frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt}\wedge\overrightarrow{QP} + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge [\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{QP}]) \neq 0$$

Donc le champ des accélérations n'est pas généralement équiprojectif.

III- paramétrage d'un solide (S) par rapport à R_0

1. Décomposition du mouvement :

Soit R_0 un repère orthonormé direct et fixe

(S) est en mouvement par rapport à R_0

- Le mouvement de (S) par rapport à R_0 est une isométrie définie par : $(S)^t \underbrace{\rightarrow}_{isométrie} (S)^{t'>t}$

Cette isométrie se décompose en une translation et trois rotations élémentaires.

- Nous avons vu que le mouvement de (S) par rapport à R_0 peut être représenté par le torseur cinématique de (S) par rapport à R_0

Ce torseur peut se décomposer comme suit :

$$\underbrace{\tau_{S/R_0}}_{mvt\ général} = \underbrace{\tau}_{translation\ \ de\ (S)/R_0} + \underbrace{f}_{rotation\ \ autour\ \ de\ l'axe\ (\Delta) de\ (S)/R_0}$$

Ces rotations sont définies par des angles appelés angles d'Euler ; ψ, θ et φ.

Remarque :

Le mouvement de tous points
$P \in (S) = translation\ de\ vecteur \vec{V}(G/R_0) + rotations\ autour\ de\ G$

Pour caractériser cette translation, il suffit de préciser les coordonnées de G par rapport à R_0.

$$\forall P \in (S) \qquad \vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{GP}$$

2. Angles d'Euler :

$$\underbrace{R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})}_{rep\grave{e}re\ fixe} \xrightarrow[\overrightarrow{OG} = (x,y,z)]{translation} R_{bary}(G,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0}) \xrightarrow[\overrightarrow{Oz_0}]{rot\,\Psi}$$

$$R_1(G,\vec{u},\vec{v},\vec{z_0}) \xrightarrow[\overrightarrow{Gu}]{rot\,\theta}$$

$$\underbrace{R_2(G,\vec{u},\vec{w},\vec{z})}_{li\acute{e}\ au\ l'axe\ (\Delta)\parallel\overrightarrow{Gz}} \xrightarrow[\overrightarrow{Gz}]{rot\,\varphi} \underbrace{S = R_s(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}_{li\acute{e}\ au\ solide}$$

Les trois angles d'Euler sont :

- ✓ La précession Ψ (autour d'un axe de direction fixe par rapport à R_0) repère $\forall t$ le plan (π) contient l'axe(Δ) .
- ✓ La notation θ positionne (Δ) dans le plan (π) : Ψ et θ connues $\rightarrow$ (Δ) connu.
- ✓ La rotation propre φ est autour de (Δ).

On a: $\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(R_s/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_{bary}) + \vec{\Omega}(R_{bary}/R_0) = \dot{\varphi}\vec{z} + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\Psi}\vec{z_0}$

Expression de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ dans $R_2(G,\vec{u},\vec{w},\vec{z})$

$\vec{z_0} = cos\theta\vec{z} + sin\theta\vec{w}$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Psi}sin\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\Psi}cos\theta \end{pmatrix}$$

Expression de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ dans $R_1(G,\vec{u},\vec{v},\vec{z_0})$

$$\vec{z} = -sin\theta\vec{v} + sin\theta\vec{z_0}$$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\Psi}sin\theta \\ \dot{\Psi} + \dot{\varphi}cos\theta \end{pmatrix}$$

Le solide (S) libre à donc besoin de 6 paramètres.

Trois coordonnées de G et trois angles d'Euler.

En général, (S) sera non libre puisqu'il sera soumis à des liaisons.

3. Condition de contact permanent

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère R_o fixe.

Soit I le point de contact de ce solide par rapport au plan fixe $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$.

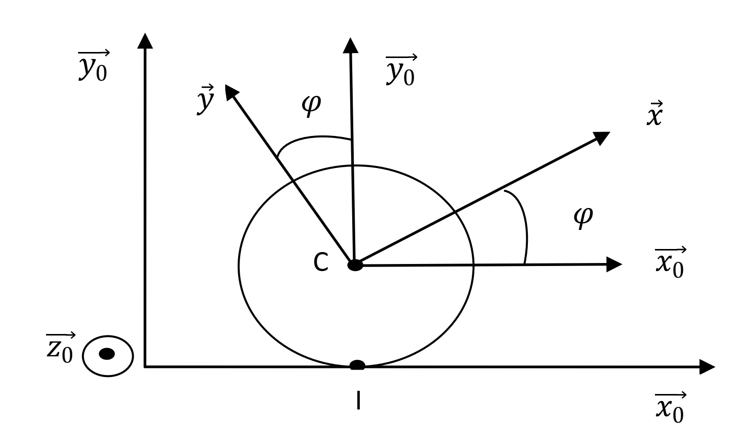
On appelle condition de contact ponctuel permanant du solide (S) avec ce plan la quantité suivante : $\overrightarrow{OI}$ multiplié par le vecteur unitaire perpendiculaire à $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$. Dans notre exemple ce vecteur est $\overrightarrow{z_0}$ et on aura :

$\overrightarrow{OI}\,\overrightarrow{z_0}=0$

- Exemple1 :

On considère un disque (D) homogène de centre G de rayon r, de masse m en mouvement plan dans le plan $[O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}]$ fixe et en contact ponctuel avec $\overrightarrow{Ox_0}$ horizontal.

(D) solide → il est décrit par 6 paramètres.(x, y, z, Ψ , θ connue → (Δ) et φ).



Condition de contact ponctuel permanent $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{y_0} = 0$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{y_0} = 0$$

Donc : $y_G=R$

IV. cinématique de contact :

On considère deux solides (S_1) et(S_2) de centre respectivement G_1 et G_2 en contact ponctuel en I. Ce contact admet un plan tangent commun (π).

Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à(π).

- Analyse du mouvement de (S_1) par rapport à (S_2)

Soit R_0 le repère d'étude et soient R_i les repères liés à (S_i), l'étiquette I ne représente ni une particule matérielles, de (S_1) ni une particule de (S_2) au cours du temps.

I représente une succession de particule de (S_1) et (S_2) qui assurent le contact.

- Remarque :

$\forall P \in (S_1) \rightarrow \overrightarrow{OP}$ est un champ de vecteurs.

$\forall P \in (S_1) \rightarrow \vec{V}(P \in S_1/S_2) = \vec{V}(P \in S_1/R_2) = \vec{V}(I \in S_1/R_2) + \vec{\Omega}(S_1/R_2) \wedge \overrightarrow{IP}$

On décompose $\vec{\Omega}(S_1/R_2) = \underbrace{\vec{\Omega}_{\parallel(\pi)}(S_1/R_2)}_{rotation\ \ instantan\ \ ée\ de\ roulement} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\perp(\pi)}(S_1/R_2)}_{rotation\ \ instantan\ \ ée\ deoivotement}$

$$\forall P \in (S_1) \qquad \vec{V}(P/R_2) = \underbrace{\vec{V}(I/R_2)}_{glissement} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\parallel}(S_1/R_2) \wedge \overrightarrow{IP}}_{roulem\ ent} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\perp}(S_1/R_2) \wedge \overrightarrow{IP}}_{pivotement}$$

1. Le glissement de (S_1) par rapport à (S_2)

On a: $\vec{V}(I \in S_1/R_2) \neq \left.\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right|_R$

Pour déterminer la vitesse du point I par rapport à R_2, on applique la relation d'antisymétrie suivante :

$$\vec{V}(I \in S_1/R_2) = \vec{V}(G_1/R_2) + \vec{\Omega}(S_1/R_2) \wedge \overrightarrow{G_1 I}$$

$\vec{V}(I \in S_1/R_2)$ est la vitesse de glissement de **(S_1) par rapport à R_2 notée** $\overrightarrow{V_g}(S_1/R_2)$.

2. Propriétés :

a) $\forall$ *le repère R,* $\overrightarrow{V_g}(S_1/S_2) = \vec{V}(I \in S_1/R) - \vec{V}(I \in S_2/R)$

b) $\overrightarrow{V_g}(S_1/S_2) \in$ **toujours à** (π)

- Conséquences :

Le non glissement de (S_1) par rapport à (S_2) se traduit par $\overrightarrow{V_g}(S_1/S_2) = \vec{0}$

On calculera toujours $\overrightarrow{V_g}(S_1/S_2)$ dans la base associée à (π).

3. Pivotement et roulement :

- **Le pivotement**

$$\boldsymbol{P} \in (S_1) \qquad \vec{V}(P \in S_1/R_2) = \vec{\Omega}_\perp(S_1/R_2) \wedge \overrightarrow{IP}$$

Avec : $\vec{\Omega}_\perp(S_1/R_2) = [\vec{\Omega}(S_1/R_2).\vec{n}].\vec{n}$

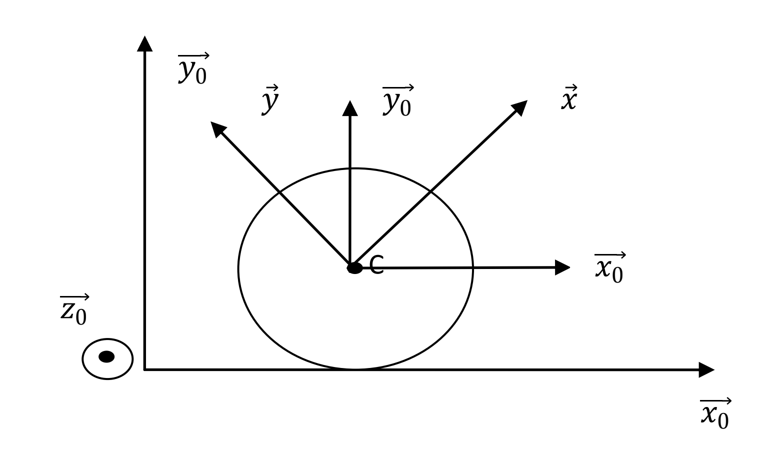
- **Le roulement**

$$\boldsymbol{P} \in (S_1) \qquad \vec{V}(P \in S_1/R_2) = \vec{\Omega}_{//}(S_1/R_2) \wedge \overrightarrow{IP}$$

Avec : $\vec{\Omega}_{//}(S_1/R_2) = \vec{\Omega}(S_1/R_2) - \vec{\Omega}_\perp(S_1/R_2)$

- ***Exemple1 :***

Disque (D) homogène, de centre C et de rayon r en mouvement plan dans $[O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}]$ et en contact avec $\overrightarrow{Ox_0}$ fixe du $R_0[O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}]$ fixe orthonormé direct.



$Soit\ [\pi] le$ plan tangent commun. On a : $[\pi] = [I,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0}]$

$$\vec{\Omega}_{\perp}(D/R_0) = \vec{\Omega}_{plan}(D/R_0) = \left[\vec{\Omega}(D/R_0).\vec{y}_0\right] = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_{\parallel}(D/R_0) = \vec{\Omega}(D/R_0) - \vec{\Omega}_{\perp}(D/R_0) = \dot{\varphi}\vec{z}_0$$

Non glissement ?

On a : $\overrightarrow{OI} = x\vec{x}_0$

1ére méthode :

$$\vec{V}(I \in D/R_0) = \left[\vec{V}(P \in D/R_0)\right]_{P\equiv I}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GP} = X\vec{x}_0 + R\vec{y}_0 + R\vec{x}$$

Donc : $\left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_{P\equiv I} = \left[\vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{GP}\right]_{P\equiv I}$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG} = X\vec{x}_0 + R\vec{y}_0$$

$\vec{V}(G/R_0) = \dot{x}\vec{x}_0$

$$\vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{GP} = \dot{\varphi}\vec{z}_0 \wedge R\vec{x} = R\dot{\varphi}\vec{y}$$

$\vec{V}(P/R_0) = \dot{x}\vec{x}_0 + R\dot{\varphi}\vec{y}$

$P \equiv I \quad \leftrightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \begin{cases} \vec{x} = -\overrightarrow{y_0} \\ \vec{y} = \overrightarrow{x_0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{x} = cos\varphi\overrightarrow{x_0} + sin\varphi\overrightarrow{y_0} \\ \vec{y} = -sin\varphi\overrightarrow{x_0} + cos\varphi\overrightarrow{y_0} \end{cases}$

$\vec{V}(I \in D/R_0) = \left[\vec{V}(P \in D/R_0)\right]_{P\equiv I} = [\dot{x}\vec{x}_0 + R\dot{\varphi}\vec{y}]_{\varphi=\frac{3\pi}{2}} = (\dot{x} + R\dot{\varphi})\vec{x}_0 \in \pi$

Non glissement de (D) par rapport à R_0 $\dot{x} + R\dot{\varphi} = 0$

- **2éme méthode :**

I représente un point réel $\in (D)$

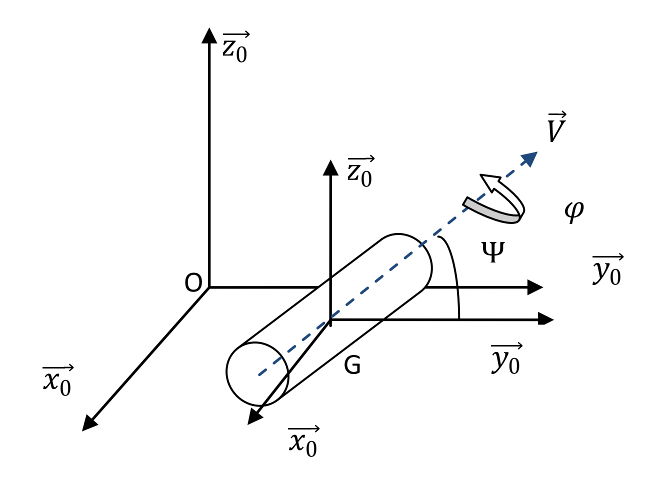
$\overrightarrow{V_g}(D/R_0) = \vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{GI} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{\varphi}\vec{y}_0 \wedge -R\vec{y}_0 = (\dot{x} + R\dot{\varphi})\vec{x}_0$

Non glissement $\dot{x} + R\dot{\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad x + R\varphi = x_0 + R\varphi_0 = cte$

$\varphi = \frac{cte - x}{R}$

- ***Exemple2 :***

On considère un cylindre homogène de rayon à la base R, de centre G, de hauteur h en contact suivant l'une de ses génératrice avec le plan horizontal fixe $[O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}]$



$\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\Psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{V}$

$(\pi) = [I, \vec{x_0}, \vec{y_0}]$

$\overrightarrow{\Omega_{piv}}(D/R_0) = \dot{\Psi}\vec{z}_0$ $\overrightarrow{\Omega_{roul}}(D/R_0) = \dot{\varphi}\vec{V}$

Non glissement de D par rapport à R_0

Si (Δ) **génératrice de contact à l'instant t considéré**

$\forall I \in (D)$ $\vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{0}$

Soit $I \in (D)$ non glissement en J

J projection de G par rapport à (Δ). $\vec{V}(J \in D/R_0) = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{GJ}$

$$\vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \overrightarrow{GJ} = \left[\dot{\Psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{V}\ \right] \wedge -R\vec{z}_0 = -R\dot{\varphi}\left(\vec{V} \wedge \vec{z}_0\right) = -R\dot{\varphi}\vec{u}$$

$$\vec{V}(J \in D/R_0) = [\dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 - R\dot{\varphi}\vec{u}\ \ ]$$

$$\vec{u} = cos\Psi\vec{x}_0 + sin\Psi\vec{y}_0$$

Donc la vitesse de glissement en J est : $\vec{V}(J \in D/R_0) = \begin{vmatrix} \dot{x} - R\dot{\varphi}cos\Psi \\ \dot{y} - R\dot{\varphi}sin\Psi \\ 0 \end{vmatrix}$

Non glissement en J $\begin{cases} \dot{x} - Rcos\Psi = 0 \\ \dot{y} - Rsin\Psi = 0 \end{cases}$ c'est une liaison non holonome